НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерных технологий

**Математический анализ**

ИДЗ №1– 2 семестр

Двоеглазова Наталья

г. Санкт-Петербург

весна 2024

**1. Исследовать данную функцию на равномерную непрерывность на данном множестве, пользуясь определением:**

a)

Определение равномерной непрерывности:

Очевидно, на данном множестве функция является равномерно непрерывной. Докажем этот факт.

Доказательство:

\* Рассмотрим

Либо, другой способ: выполним еще одну оценку:

Заметим, что максимальное значение будет достигаться при , стремящемуся к максимуму (т.е. к 4), и при стремящемуся к минимуму (т.е. к 0), так как обе функции положительны (поменяв их местами, мы ничего не теряем по свойствам модуля) => максимальное значение будет ограничено сверху 4. Тогда:

Если бы мы пользовались не определением равномерной непрерывности, а другими фактами из курса, можно было бы рассмотреть производную данной функции:

Если функция имеет на промежутке ограниченную производную, то равномерно непрерывна на этом промежутке.

б)

На данном множестве функция не является равномерно непрерывной. Обоснуем.

Доказательство:

Пусть 0 =>

Положим

При этом:

Ура, действительно, нашлось что-то большее . Значит, мы победили. Но это только начало. Дальше будет не так просто, ведь это матанализ.

**2**. **Преобразовать выражение к интегральной сумме, доказать существование соответствующего интеграла и найти предел:**

И снова победа, но лишь промежуточная.

**3. В рамках данного задания выполнить аналитический и практический этапы работы с определенным интегралом.**

**3.1.1 Суммы Дарбу:**

Факт известный каждому советскому школьнику – верхняя сумма Дарбу определяется как:

А нижняя сумма Дарбу:

Разделим наш отрезок на n равных частей. Получим Характер функции – монотонно убывающая. Тогда возьмем крайнюю левую точку в каждом подынтервале как максимальное значение , а крайнюю правую – как минимальное .

Рассмотрим суммы Дарбу:

Доказать интегрируемость функции поможет критерий Дарбу:

Вычислим предел:

Время телескопа!

Ура, всё получилось. Наша функция интегрируема, составим интегральную сумму.

**3.1.2 Интегральная сумма:**

Поделим отрезок интегрирования на n равных частей. Пусть

Тогда координаты деления: .

Значения функции в правых концах частичных отрезков:

Перейдем к интегральной сумме:

Тогда

Воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница:

Удивительно, но ответы совпали. Как всегда, матанализ полон сюрпризов.

**3.2.1 Практический этап:**

**MAE MSEИзображение выглядит как снимок экрана, текст, линия, График

Автоматически созданное описаниеИзображение выглядит как текст, снимок экрана, дисплей, диаграмма

Автоматически созданное описание**

По итогам построения метод прямоугольников оказался наименее точным, серебро досталось методу трапеций, а метод Симпсона заслуженно получил звание наиболее точного способа вычисления интеграла.

**4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически.**

**Сделать рисунок.**

Найдем значения точек, которые соответствуют наиболее простым значениям параметра t:

t = 0 => = (0;0) t = => = (a ; a ) t= => = (a ; a )

t = => = (a ; a ) t = => =(0; 0) t = => =(a ; a )

Аналогично, в уме проделаем для оставшихся базовых точек. Тогда легко заметить, что в точках пересечения с осями Ox и Oy (0, , , ) значение будет равняться нулю, а в других значения будут симметричны относительно осей Ox и Oy. Предположим, что получится что-то вроде «цветочка» с 4 лепестками.

Desmos спешит на помощь:

Изображение выглядит как снимок экрана, линия, График, диаграмма

Автоматически созданное описание

№1

Удивительно, но предположение оказалось верным. Теперь можно смело сделать вывод, что площадь всей фигуры равна 4 площадям лепестка №1. Именно его площадь и посчитаем.

Пожалуй, самое время перейти к полярным координатам, ведь мы не хотим лишний раз возиться с тригонометрией.

Воспользуемся формулой , приравняем эти выражения к уже данным равенствам.

Выразим *r* и :

Воспользуемся формулой:

Получим простейший интегральчик:

Домножим на 4, чтобы найти площадь всех 4 лепестков: – мы получили ответ в «гадании на лепестках». Продолжаем изучать матанализ.

**5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением:**

Перейдем к полярным координатам:

Изображение выглядит как диаграмма, линия, круг, снимок экрана

Автоматически созданное описание

Теперь осталось найти площадь одного из лепестков и домножить на 2:

Следовательно полная площадь фигуры .

**6. Кривая задана как пересечение поверхностей, заданных данными уравнениями в декартовых координатах. Задайте кривую параметрически и найдите длину кривой.**

Cначала поколдуем над правым равенством:

Параметризация, вдохновленная полярными координатами:

Введем параметр t = .

Тогда

*т.к.*

Рассмотрим сумму квадратов производных

Тогда:

Победить этот интеграл без Вольфрама не получилось. А значит, я зря изучаю матанализ.